සියලු ම හිමිකම් ඇවිරිණි/ முழுப் பதிப்புரிமையுடையது/ All Rights Reserved

මධ්‍යම පළාත් අධ්‍යාපන දෙපාර්තමේන්තුව
மத்திய மாகாண கல்வித் திணைக்களம்
DEPARTMENT OF EDUCATION - CENTRAL PROVINCE

අ.පො.ස. (උ.පෙළ) පෙරහුරු පරීක්ෂණය - 2026

සංයුක්ත ගණිතය I | 10 | S | I | 13 ශ්‍රේණිය

ප්‍රශ්න පහකට පමණක් පිළිතුරු සපයන්න.

B කොටස

11.

(a). p, q සහ r තාත්වික නියත වේ. $p > 0$ සහ $q^2 - 4pr < 0$ විට සියලු තාත්වික x අගයන් සඳහා $px^2 + qx + r > 0$ බව පෙන්වන්න.
$x^2 + (k - a)x + (2 - a - k) = 0$ වර්ගජ සමීකරණයේ විවේචකය ලියන්න.
k හි සියලු තාත්වික අගයන් සඳහා මෙම වර්ගජ සමීකරණයට තාත්වික ප්‍රභින්න මූල තිබේ නම් a ට ගතහැකි අගය පරාසය සොයන්න.
තවද, මෙම සමීකරණයේ මූල දෙකම සෘණ විය නොහැකි බව පෙන්වන්න.

(b). $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + k$ යැයි ගනිමු. මෙහි k යනු ($k > 0$) වූ තාත්වික නියතයකි.
$(x - \alpha)$ යනු $f(x)$ හි පුනරාවර්තන සාධකයක් නම්, $f(x)$ යන්න $f(x) = (x - \alpha)^2(x - \beta)$ ආකාරයට ප්‍රකාශ කරන්න. මෙහි α සහ β යනු නිර්ණය කළ යුතු නියතයන් වේ.
$g(x) = x^3 + px^2 + qx + 10$ යන බහුපදය $(x - 1)$ සහ $(x + 2)$ මගින් බෙදූ විට ලැබෙන ශේෂයන් පිළිවෙළින් 6 සහ 0 වේ.
$g(x)$ බහුපදය $(x - 1)(x + 2)$ මගින් බෙදූ විට ලැබෙන ශේෂය $R(x)$ සොයන්න.
p සහ q හි අගයන් වෙන වෙනම සෙවීමෙන් තොරව, $g(x) - f(x) = 0$ සමීකරණය විසඳන්න.

12.

(a). කණ්ඩායම් දෙකක සාමාජිකයින් අතරින් සාමාජිකයින් හය දෙනෙකුගෙන් යුත් කමිටුවක් තේරිය යුතුව ඇත. එක් එක් කණ්ඩායමේ මෘදුකාංග ඉංජිනේරුවන් (Software Engineers) තිදෙනෙකු සහ දත්ත විද්‍යාඥයින් (Data Scientists) දෙදෙනෙකු බැගින් සිටී.

(i) කමිටුවේ සිටින මුළු දත්ත විද්‍යාඥයින් සංඛ්‍යාව උපරිම වශයෙන් දෙදෙනෙකු විය යුතු නම්, කමිටුව සඳහා එක් එක් කණ්ඩායමෙන් ඉරට්ටේ සංඛ්‍යාවක සාමාජිකයින් තෝරා ගෙන කමිටුව සෑදිය හැකි වෙනස් ආකාර ගණන සොයන්න.

(ii) කමිටුව සඳහා තෝරා ගනු ලබන්නේ එක් දත්ත විද්‍යාඥයෙකු පමණක් නම්, කමිටුව සෑදිය හැකි වෙනස් ආකාර ගණන සොයන්න.

(b). $r \in \mathbb{Z}^+$ සඳහා $\frac{1}{r(r+1)(r+2)} = \frac{A}{r(r+1)} - \frac{B}{(r+1)(r+2)}$ වන පරිදි A හා B නියත සොයන්න; මෙහි $A, B \in \mathbf{R}$ වේ.

$r \in \mathbb{Z}^+$ සඳහා $U_r = \frac{1}{r(r+1)(r+2)}$ යැයි ගනිමු. $U_r = f(r) - f(r+1)$ වන ලෙස $f(r)$ ශ්‍රිතය ලබාගන්න; මෙහි $r \in \mathbb{Z}^+$.

එනයින්, $n \in \mathbb{Z}^+$ සඳහා $\sum_{r=1}^{n} U_r = \frac{1}{4} - \frac{1}{2(n+1)(n+2)}$ බව පෙන්වන්න.

$\sum_{r=1}^{\infty} U_r$ අපරිමිත ශ්‍රේණිය අභිසාරී බව අපෝහනය කර එහි ඓක්‍යය සොයන්න.

13.

(a) $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ ද $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 4 & 2 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$ ද යැයි ගනිමු. AB සොයන්න. C හා D යනු ගණය දෙක වන $B^T A^T = CD$ වන පරිදි වූ න්‍යාස දෙකකි. මෙහි C යනු කුටික සමමිතික න්‍යාසයක් වන අතර D යනු $\begin{pmatrix} p & q \\ 10 & s \end{pmatrix}$ ආකාරයේ න්‍යාසයකි. මෙහි p, q, s යනු නිර්ණය කළ යුතු නිඛිල වේ. C හා D න්‍යාස සොයන්න.

D හි නිශ්චායකය සොයා D^{-1} ලියා දක්වන්න.

$E = \begin{pmatrix} 9 \\ 20 \end{pmatrix}$ නම් $D^{-1}E = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}$ බව පෙන්වන්න.

එනයින් $-2x + y = 3, 5x + y = 10$ යන සමගාමී සමීකරණ දෙකෙහි විසඳුම් අපෝහනය කරන්න.

(b). $z, w \in \mathbb{C}$ යැයි ගනිමු.

(i) $|z|^2 = z\bar{z}$,

(ii) $|z - w|^2 = |z|^2 - 2Re\, z\bar{w} + |w|^2$

බව පෙන්වන්න.

$w = \frac{-4(\sqrt{3}+i)}{(1+\sqrt{3}i)}$ යැයි ගනිමු. $|w| = 4$ බවද $Arg\, w = \frac{5\pi}{6}$ බවද පෙන්වන්න.

$|z| = 4$ සහ $Arg\, z = \frac{\pi}{4}$ යැයි ගනිමු. A සහ B ලක්ෂ්‍ය ආගන්ඩ් සටහනේ z සහ w සංකීර්ණ සංඛ්‍යා පිළිවෙළින් නිරූපණය කරයි.

ඉහත $|z - w|^2$ සඳහා ලැබුණු ප්‍රකාශනය භාවිතයෙන් $AB^2 = 8(4 + \sqrt{6} - \sqrt{2})$ බව පෙන්වන්න.

C යනු AB හි මධ්‍ය ලක්ෂ්‍යය යැයි ගනිමු. AOC ත්‍රිකෝණය භාවිතයෙන් $sin^2 \frac{7\pi}{24} = \frac{1}{8}(4 + \sqrt{6} - \sqrt{2})$ බව අපෝහනය කරන්න.

(c). $n \in \mathbb{Z}^+$ සඳහා ද මුවාවර් ප්‍රමේයය ලියා දක්වන්න.

$n \in \mathbb{Z}^+$ සඳහා $\omega = cos\theta + i\, sin\theta$ යැයි ගනිමු. $Arg\, \omega = \theta$ වේ. ද මුවාවර් ප්‍රමේයය භාවිතයෙන් $\omega^2, \omega^3, \omega^4$ සඳහා ප්‍රකාශන ලියා දක්වන්න.

$Z = \omega + \omega^2 + \omega^3 + \omega^4$ විට $Re\, z$ සොයන්න. $Re\, z = 0$ හා $Arg\, \omega > \frac{\pi}{2}$ වන පරිදි θ සොයන්න.

14.

(a). $x \neq 3, 5$ සඳහා $f(x) = \frac{x^2}{(x-3)(x-5)}$ යැයි ගනිමු $x \neq 3,5$ සඳහා $f(x)$ හි ව්‍යුත්පන්නය $f'(x)$ යන්න $f'(x) = \frac{2x\,(15-4x)}{(x-3)^2(x-5)^2}$ මගින් දෙනු ලබන බව පෙන්වන්න. එනයින් $f(x)$ වැඩිවන හා $f(x)$ අඩුවන ප්‍රාන්තර සොයන්න.

ස්පර්ශෝන්මුඛ හා හැරුම් ලක්ෂ්‍ය දක්වමින් $y = f(x)$ හි ප්‍රස්තාරයේ දළ සටහනක් අඳින්න.
එනයින් $f(x) + e^x = 0$ සමීකරණය තෘප්ත කරන පරිදි විසඳුම් ගණන සොයන්න.

(b). අරය 3 cm හා කේන්ද්‍ර කෝණය θ වූ කේන්ද්‍රික ඛණ්ඩයක් මගින් උස $h\ cm$ ද අරය $r\ cm$ ද වන කේතුවක් සාදනු ලැබේ. θ (රේඩියන්) හා r අතර සම්බන්ධයක් ලබා ගන්න.
කේතුවේ පරිමාව $v = \frac{1}{3}\pi h(9 - h^2)$ බව පෙන්වන්න. කේතුවේ පරිමාව උපරිම වන h හි අගය සොයා එම h ට අදාළ කේන්ද්‍රික කෝණය $\theta = \frac{2\sqrt{6}\pi}{3}$ බව පෙන්වන්න.

15.

(a). $A(3x + \pi) + B(2x + e) = -4x + 2\pi - 5e$ වන පරිදි A හා B අගයන් සොයන්න.
එනයින්, $\int \frac{-4x+2\pi-5e}{6x^2+(3e+2\pi)x+\pi e}\,dx$ අගයන්න.

(b). $y = e^{-x}\cos(\sqrt{3}x)$ නම් $\frac{dy}{dx} = -2e^{-x}\sin\left(\sqrt{3}x + \frac{\pi}{6}\right)$ බව පෙන්වන්න.

තවද කොටස් වශයෙන් අනුකලනය භාවිතයෙන් $\int_0^{\frac{\pi}{\sqrt{3}}} e^{-x}\cos(\sqrt{3}x)\,dx$ අගයන්න.

එනයින්,

$$\int_0^{\frac{\pi}{\sqrt{3}}} x\,e^{-x}\sin\left(\sqrt{3}x + \frac{\pi}{6}\right)dx = \frac{1}{8}\left[\frac{4\pi + \sqrt{3}}{\sqrt{3}}\,e^{-\frac{\pi}{\sqrt{3}}} + 1\right]$$ බව පෙන්වන්න.

(c). a නියතයක් වන විට $\int_0^a f(x)\,dx = \int_0^a f(a-x)\,dx$ සූත්‍රය භාවිතයෙන්,

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(1 + \tan x)\,dx = \frac{\pi}{8}\ln(2)$$ බව පෙන්වන්න.

16.

$l_1 = a_1x + b_1y + c_1 = 0$ හා $l_2 = a_2x + b_2y + c_2 = 0$ අසමාන්තර සරල රේඛා දෙකෙහි කෝණ සමච්ඡේදක වල සමීකරණ සොයන්න.

$l_1 = 3x - 4y + 5 = 0$ සහ $l_2 = 3x + 4y - 5 = 0$ රේඛා දෙකෙහි සුළු කෝණ සමච්ඡේදකයේ සමීකරණය සොයන්න.

$A \equiv (1,2)$ හා $B \equiv (2,-1)$ ලක්ෂ්‍ය දෙකක් වන අතර C යනු $BC = 2AC$ වන පරිදි වූ ලක්ෂ්‍යයකි. C ලක්ෂ්‍යයෙහි පථය $x^2 + y^2 - \frac{4}{3}x - 6y + 5 = 0$ සමීකරණය සහිත වෘත්තයක් බව පෙන්වන්න.

එම වෘත්තයෙහි අරය සොයා වෘත්තයේ කේන්ද්‍රයේ සිට ඉහත සුළු කෝණ සමච්ඡේදකයට ඇති ලම්භක දුර සොයන්න. එනයින් සුළු කෝණ සමච්ඡේදකය හා වෘත්තය එකිනෙක ඡේදනය වන බව පෙන්වන්න.

තව ද එම ඡේදන ලක්ෂ්‍ය හරහා යමින්, A ලක්ෂ්‍යය හරහා ද යන වෘත්තයේ සමීකරණය ලබා ගන්න.

ඉහත ලබා ගත් වෘත්ත දෙක ප්‍රලම්බව ඡේදනය වේ දැයි නිර්ණය කරන්න.

17.

(a). $\sin A, Cos\ A,\ Sin\ B, Cos\ B$ ඇසුරින් $\sin(A+B)$ හා $Cos(A+B)$ සඳහා ප්‍රකාශන ලියා දක්වන්න.

$\sin 2A = 2sinACosA$ හා

$cos\ 2A = 1 - 2sin^2A$ බව අපෝහනය කරන්න.

එනයින් $f(x) = \sqrt{3}\cos 2x + \sin 2x$ ලෙස දී ඇති $f(x)$ ශ්‍රිතය $A\,sinx\,Cos\,(x+\alpha) + B$ ආකාරයෙන් ප්‍රකාශ කරන්න. මෙහි A, B හා α නිර්ණය කළ යුතු නියත වේ.

$g(x)$ යන්න $\frac{f(x)}{2\sin x} = g(x) + \frac{\sqrt{3}}{2\sin x} - 1$ වන ලෙස ගනිමු.

$0 < x \leq \frac{5\pi}{6}$ පාරාසය තුළ $y = g(x)$ ශ්‍රිතයේ ප්‍රස්තාරයේ දළ සටහනක් අඳින්න.

එනයින් ඉහත පරාසය තුළ $f(x) = \sqrt{3}$ සමීකරණයට එක් තාත්වික මූලයක් පමණක් ඇති බව පෙන්වන්න.

(b). ABC යනු $AB = AC$ වූ සමද්විපාද ත්‍රිකෝණයකි. D හා E යනු $B\hat{A}C = 3\theta$ වන ලෙස BC රේඛාව ත්‍රිඡේද කරන ලක්ෂ්‍ය වේ. $BD = CE$ බව පෙන්වන්න. තවද, $A\hat{D}E = \alpha$ නම් සුදුසු ත්‍රිකෝණයන් සඳහා සයින් නීතිය භාවිතයෙන්

$\tan\alpha = \frac{\sin\theta}{1-\cos\theta}$ බව පෙන්වන්න.

(c). $x > 1$ සඳහා $\cos^{-1}\left(\frac{x^2-1}{x^2+1}\right) + \tan^{-1}\left(\frac{2x}{x^2-1}\right) = \frac{2\pi}{3}$ විසඳන්න.

***